

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 marzo 1919.

A. RÖRTI, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — Una pseudo-determinazione della costante d'aberrazione. Nota II del Corrispondente V. CERULLI.

Nella nostra precedente Nota di egual titolo, dimostrammo la formula:

$$(1) \quad C\Delta f + \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0,$$

posta dal sig. G. Boccardi a base della sua ricerca sulla costante d'aberrazione, esser falsa sì per la omissione ⁽¹⁾ dei termini di parallasse e di moto proprio, e sì per il segno del coefficiente dell'incognita Δf . Dimostrammo anche che attesa la eliminazione sostanzialmente operata dall'A., della incognita φ_0 , la (1) dovesse, a prescindere dagli errori or detti, più correttamente scriversi:

$$(2) \quad \left\{ C - \frac{\Sigma C}{N} \right\} \Delta f + \left\{ \Delta\varphi - \frac{\Sigma \Delta\varphi}{N} \right\} = \varphi - \frac{\Sigma\varphi}{N},$$

e derivarsi da questa l'equazione mensile:

$$(3) \quad n \left\{ C_m - \frac{\Sigma C}{N} \right\} \Delta f + n \left\{ \Delta\varphi_m - \frac{\Sigma \Delta\varphi}{N} \right\} = n \left\{ \varphi_m - \frac{\Sigma\varphi}{N} \right\}.$$

(¹) La omissione di detti termini può essere una necessità quando il Δf ci è dato, non da una sola stella, osservata per tutto l'anno, ma da interi gruppi di stelle, che si sostituiscono con nuovi gruppi man mano che i loro passaggi vengono a cader in ore diurne. In tal caso i Δf (se si calcolassero di stella in stella) risulterebbero falsati, oltre che dalla perturbazione zenitale, anche dalla parallasse e dai moti propri, ma più son le stelle impiegate, e più c'è naturalmente da aspettarsi che nel Δf complessivo tali cause d'errore si compensino.

In terzo luogo notammo che la equazione-somma di tutte queste equazioni mensili debba necessariamente risultar della forma $0=0$, e che quindi il metodo ideato dal Boccardi per determinare Δf sia affatto illusorio. Ma oltre questo modo di sommazione delle equazioni mensili, il Boccardi ne ha escogitato anche un secondo del quale è tempo di occuparci.

L'A. del *Saggio* pensa che i $\Delta \varphi$ debbano autoeliminarsi non soltanto nella somma generale delle equazioni mensili, ma eziandio in ciascuna delle due somme parziali che risultano addizionando da una parte tutte le equazioni con coefficiente C positivo, e dall'altra tutte quelle con C negativo. Sfuggendogli che queste due somme parziali, quando siano correttamente dedotte, devono, aggiunte fra loro, dar $0=0$, egli se le immagina come due equazioni diverse ed indipendenti; e crede che se risolvendole, otterrà da entrambe lo stesso Δf , o due Δf poco diversi, ciò vorrà dire che effettivamente in ciascuna i $\Delta \varphi$ erano scomparsi!

Tali equazioni, in base a tutti e tre i cicli chandleriani considerati (1812-1916), sono (1):

$$(4) \quad \begin{cases} C \text{ positivi} & + 15,82 \Delta f = + 0'',716 & \text{da cui} & \Delta f = + 0'',045 \\ C \text{ negativi} & - 10,98 \Delta f = - 0,627 & \text{da cui} & \Delta f = + 0,057, \end{cases}$$

e Boccardi non esita a scrivere: « l'accordo dei due Δf è molto soddisfacente, ... e depone in favore dell'ipotesi del compenso nelle variazioni di φ negli n (*termini noti*) corrispondenti ai C positivi e negativi, separatamente ».

La fallacie di questa illazione è senz'altro manifesta, ma vogliamo esaminarne i termini un po' più a fondo.

Per dedurre dalle equaz. mensili (3) le somme parziali intese dall'A., indichiamo con \sum_+ e \sum_- i sommatori delle quantità $C, \varphi, \Delta \varphi, n$, in rispondenza rispettivamente delle equazioni a C positivo e negativo, e con Σ i sommatori totali. La somma delle equazioni positive dà:

$$\left\{ \sum_+ n C - \frac{\Sigma C}{N} \sum_+ n \right\} \Delta f + \left\{ \sum_+ n \Delta \varphi - \frac{\Sigma \Delta \varphi}{N} \sum_+ n \right\} = \left\{ \sum_+ n \varphi - \frac{\Sigma \varphi}{N} \sum_+ n \right\},$$

dove abbiamo soppressi gli apici m , ed intendiamo che sotto i segni \sum_+ e \sum_- si aggruppino medie mensili. Similmente la somma delle equazioni con C negativo sarà

$$\left\{ \sum_- n C - \frac{\Sigma C}{N} \sum_- n \right\} \Delta f + \left\{ \sum_- n \Delta \varphi - \frac{\Sigma \Delta \varphi}{N} \sum_- n \right\} = \left\{ \sum_- n \varphi - \frac{\Sigma \varphi}{N} \sum_- n \right\}.$$

(1) Queste equazioni così scritte possono effettivamente (senza che l'A. ne abbia avuta l'intenzione) illudere chi legge, e fargli credere che per due vie diverse e indipendenti si sia giunti a due risultati pressochè identici: ciò che conferirebbe ai risultati stessi un *imponente* grado di attendibilità.

Ma attese le relazioni:

$$N = \sum_{+} n + \sum_{-} n \quad \sum \Delta \varphi = \sum_{+} n \Delta \varphi + \sum_{-} n \Delta \varphi \quad \sum C = \sum_{+} n C + \sum_{-} n C$$

$$\sum \varphi = \sum_{+} n \varphi + \sum_{-} n \varphi ,$$

le due equazioni si potranno anche scrivere:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{N} \left\{ \sum_{-} n \sum_{+} n C - \sum_{+} n \sum_{-} n C \right\} \Delta f + \frac{1}{N} \left\{ \sum_{-} n \sum_{+} n \Delta \varphi - \sum_{+} n \sum_{-} n \Delta \varphi \right\} &= \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{-} n \sum_{+} n \varphi - \sum_{+} n \sum_{-} n \varphi \right\} \\ \frac{1}{N} \left\{ \sum_{+} n \sum_{-} n C - \sum_{-} n \sum_{+} n C \right\} \Delta f + \frac{1}{N} \left\{ \sum_{+} n \sum_{-} n \Delta \varphi - \sum_{-} n \sum_{+} n \Delta \varphi \right\} &= \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{+} n \sum_{-} n \varphi - \sum_{-} n \sum_{+} n \varphi \right\} . \end{aligned} \right.$$

Sono dunque un'unica equazione, scritta ora con uno, ora con l'altro segno, come era naturale di attendersi, sapendo che la loro somma deve dar zero in entrambi i membri. Le equazioni con C positivo sono 26, ed in tutte è assunto $n = 1$: quindi $\sum_{+} n = 26$. Le equazioni con C negativo sono 22, in 17 delle quali è $n = 1$, ed in 5 è $n = 1/2$. Dunque $\sum_{-} n = 17 + 5/2 = 19,5$, e la (5) diventa:

$$\frac{1}{45,5} \left\{ 19,5 \sum_{+} C - 26 \sum_{-} n C \right\} \Delta f + \frac{1}{45,5} \left\{ 19,5 \sum_{+} \Delta \varphi - 26 \sum_{-} n \Delta \varphi \right\} =$$

$$= \frac{1}{45,5} \left\{ 19,5 \sum_{+} \varphi - 26 \sum_{-} n \varphi \right\} ,$$

dove abbiamo conservato il fattore n in \sum_{-} , ma lo abbiamo soppresso in \sum_{+} per ivi essere dappertutto $= 1$. Il secondo membro può esprimersi mediante i termini ⁽¹⁾ noti ν delle equazioni dell'A., osservando che:

$$\sum_{+} \varphi = \sum_{+} \nu + 26 \varphi_0 \quad , \quad \sum_{-} n \varphi = \sum_{-} n \nu + 19,5 \varphi_0 ,$$

da cui:

$$19,5 \sum_{+} \varphi - 26 \sum_{-} n \varphi = 19,5 \sum_{+} \nu - 26 \sum_{-} n \nu ,$$

⁽¹⁾ L'A. indica i termini noti con n , che noi abbiamo adoperato qui sopra in altro senso.

e l'equazione precedente prende la forma:

$$\left\{ 0,43 \underset{+}{\Sigma} C - 0,57 \underset{-}{\Sigma} nC \right\} \Delta f + \left\{ 0,43 \underset{+}{\Sigma} \Delta \varphi - 0,57 \underset{-}{\Sigma} n \Delta \varphi \right\} = \\ = \left\{ 0,43 \underset{+}{\Sigma} v - 0,57 \underset{-}{\Sigma} nv \right\}.$$

Per completare la messa in numeri, attingiamo alla Nota II di Boccardi, correggendone un errore nel C del 21-luglio 1915:

$$\underset{+}{\Sigma} C = + 15,29 \quad \underset{-}{\Sigma} nC = - 10,98 \quad \underset{+}{\Sigma} v = + 0'',716, \quad \underset{-}{\Sigma} nv = - 0'',627$$

e l'equazione sarà:

$$(6) \quad + 12,83 \Delta f + X = + 0'',665$$

dov'è posto:

$$X = 0,43 \underset{+}{\Sigma} \Delta \varphi - 0,57 \underset{-}{\Sigma} n \Delta \varphi.$$

Questa (6) è l'equazione *unica* alla quale l'A. sarebbe pervenuto calcolando correttamente. Le sue equazioni (4) che egli crede indipendenti, così da poter dal confronto dei risultati della loro risoluzione rispetto a Δf , trarre *a posteriori* il criterio circa l'esattezza della ipotesi $X = 0$, non sono che due edizioni diversamente errate della (6), nella quale si sia *arbitrariamente* posto $X = 0$. Ed è ovvio quindi che se le (4) conducono allo stesso Δf , ciò non significa punto che i termini in $\Delta \varphi$, che l'A. non ha scritti, effettivamente si annullassero. L'accordo nasce semplicemente dal dover i due Δf essere per necessità prossimi al Δf che si trae dalla (6) nell'ipotesi $X = 0$.

Ora, che questa ipotesi sia affatto erronea, deriva in primo luogo dalle stesse premesse del Boccardi. Egli ha supposto che siano nulli separatamente $\underset{+}{\Sigma} \Delta \varphi$ e $\underset{-}{\Sigma} n \Delta \varphi$; non può più quindi pretendere, logicamente scorrendo, anche nullo $\underset{-}{\Sigma} n \Delta \varphi$. Lo stesso errore ha egli commesso nella somma generale, come vedemmo nella nostra Nota I, e l'abbaglio è nato dal vizzo tutto nuovo di operar con equazioni *a termini sottintesi*.

Ma in secondo luogo, la premessa ipotetica, racchiusa nella formula $\underset{+}{\Sigma} \Delta \varphi = \underset{-}{\Sigma} n \Delta \varphi = 0$, è essa stessa così giustificabile da potersi dire che, dando a tutte le equazioni mensili lo stesso peso, il procedimento sarebbe stato da ritenere corretto?

Certamente quelle due somme devono essere assai piccole, ma anche tutte le altre quantità che il nostro calcolo contempla, sono microscopiche (ci muoviamo fra i centesimi ed i millesimi di secondo), e nessun, benché menomo, termine può essere omissso, senza che ci sia pericolo di compromettere la veridicità del risultato. La serietà della ricerca imponeva al Boccardi l'obbligo di rendersi conto del *maximum* dell'errore che poteva commettersi, trascurando l'incognita X, ossia le due somme parziali $\sum \Delta\varphi$ e $\sum \Delta\varphi$.

Nè per far tanto gli occorreva di attendere la pubblicazione dei risultati dell'opera internazionale delle latitudini, dal momento che la polodia non era per lui altro che il ciclo di Chandler.

Assumiamo infatti i $\Delta\varphi$ espressi sufficientemente bene dalla formula ⁽¹⁾:

$\Delta\varphi = 0'',17 \sin\left(\frac{\odot}{1,185} + A\right)$ dove la longitudine \odot del Sole si prende a misura del tempo e s'intende contata indefinitamente, a partire dall'equinozio di primavera del 1912.

Le osservazioni di Boccardi si fecero, come nella Nota I abbiám detto, su $\frac{1}{2}(\alpha + \delta)$ Cygni, il cui coefficiente d'aberrazione è $C = 0,91 \sin(\odot + 16)^h$ e durarono da $\odot = 6^h$ a $\odot = 91^h$. Fra questi limiti il coefficiente C fu:

positivo negli intervalli	$\odot = 8^h - 20$	32-44	56-68	80-91 ^h
e negativo " "	$\odot = 6 - 8$	20-32	44-56	68-80

In rispondenza dell'insieme di tutti i primi e di tutti i secondi, rispettivamente, di codesti intervalli, la somma dei $\Delta\varphi$, uniformemente distribuiti, è proporzionale all'area $0'',17 \int \sin\left(\frac{\odot}{1,185} + A\right) d\odot$ la quale facilmente si calcola essere $= + 0'',725 \cos A$ per i C positivi, e $- 0'',741 \cos A$ per i negativi. E siccome la prima area si estende sopra un'ascissa $= 47/12.3,14...$ e la seconda sopra un'ascissa $= 19/6.3,14...$, così l'*ordinata media* sarà nel primo caso $+ 0'',059 \cos A$, e nel secondo $- 0'',074 \cos A$. Potremo dunque *stimare*:

$$\begin{aligned} \sum \Delta\varphi &= + 26 \times 0'',059 \cos A = + 1'',53 \cos A \text{ per essere } 26 \text{ i } C \text{ positivi} \\ \sum \Delta\varphi &= - 22 \times 0'',074 \cos A = - 1'',63 \cos A \text{ " } 22 \text{ " " negativi,} \end{aligned}$$

le quali quantità sono bensì piccole, ma tutt'altro che nulle, rispetto al problema che l'A. ha per le mani, ed il porle *a priori* fra le trascurabili

⁽¹⁾ La semiamplitudine $0'',174$ e la durata 1, 185 anni giuliani (pari a 433 giorni medi) del periodo di Chandler, sono il risultato complessivo, a tutt'oggi, delle ricerche sul periodo stesso (v. *Resultate des intern. Breitendienstes*. Bd. V, Berlin, 1916). Ma valori poco diversi erano ben cognitivi anche al tempo della ricerca che esaminiamo.

equivale ad aspettarsi che per fortunato accidente si trovi di essere $A = 6^h$ oppure 18^h . Per pochissimo infatti che la fase iniziale del periodo di Chandler sia diversa dall'uno o dall'altro di questi due tipi, le somme or ora scritte producono subito un radicale mutamento nel valore calcolato per Δf .

L'ipotesi $\sum \Delta \varphi = \sum \Delta \varphi = 0$ rappresentava dunque un *pressappoco* del quale non era lecito al nostro autore di contentarsi, dal momento che aveva a che fare con i centesimi di secondo. L'errore a cui egli si è così esposto per Δf è, in base alla (6), all'incirca:

$$\frac{1}{12,83} \{ 0,43 \times 1'',53 + 0,57 \times 1'',63 \} \cos A,$$

ossia $0'',124 \cos A$, cosicchè può dirsi che la sua ricerca, astraendo da altri errori, abbia lasciato Δf nella forma $\Delta f = + 0'',052 - 0'',124 \cos A$, cioè indeciso fra $- 0'',072$ e $+ 0'',176$, tuttochè al Boccardi sembri modesto il fissarne a $\pm 0'',01$ l'error medio!

È quindi messa in piena luce la verità di quanto asserimmo nella Nota I, la ricerca del Boccardi sulla costante d'aberrazione non aver dato risultato alcuno, altro che apparente. Tutt'al più, se, correggendo l'errore di segno dei C, segnalato nella detta Nota, consideriamo che l'ora dedotta escursione dei *possibili* Δf è da $+ 0'',072$ a $- 0'',176$, potremo dai numeri del Boccardi arguire che una diminuzione della costante $20'',47$ sia *più probabile* che un aumento, essendo il termine negativo dell'escursione maggiore, in valore assoluto, del termine positivo. Ma di quanto importi la detta diminuzione, l'A. non è riuscito a darci veruna idea.

Si vede che perchè il secondo modo tenuto dall'A. nel sommar le sue equazioni mensili potesse condurre ad un risultato, era necessario conoscere l'ampiezza $2a$ e la fase iniziale A del ciclo chandleriano. Per procurarsi i quali dati, Boccardi avrebbe dovuto risolvere un sistema di equazioni come il (3) della nostra Nota I ⁽¹⁾.

$$\Delta \varphi_0 - t\mu - D\pi - C\Delta f + \sin \frac{360^\circ t}{1.185} a \cos A + \cos \frac{360^\circ t}{1.185} a \sin A = \varphi - \varphi_0.$$

Ma con ciò egli avrebbe già ottenuto il valore della sua incognita Δf , onde in definitiva, il suo secondo metodo, *se rettificato, diventava superfluo*.

(1) Sarebbe stato utile all'A. risolvere queste equazioni, anche per veder *come*, cioè con quali resti, il ciclo puro di Chandler avrebbe rappresentato le sue osservazioni. In questo calcolo potevano omettersi i termini in $\mu \pi \Delta f$ (microvariazioni), e conservarsi solo quelli in $\Delta \varphi_0$, $a \sin A$, $a \cos A$ (macrovariazioni).

È curioso come al nostro A. siano sfuggiti dei metodi semplicissimi di vera eliminazione dei $\Delta\varphi$, che pur si presentano naturali e spontanei a chiunque anche per poco rifletta al problema. non conoscendo della polodia altro che la durata del periodo chandleriano. Ci basta citarne qui brevemente due soli ⁽¹⁾.

1° METODO. — 6 periodi di Chandler equivalendo prossimamente a 7 anni, se facciamo la media delle latitudini misurate giorno per giorno in 7 anni, avremo φ_0 libera da ogni residuo di polodia, di parallasse e di aberrazione. Scriviamo ora per ogni misura di latitudine l'equazione:

$$t\mu + D\pi + C\Delta f = (\varphi_0 - \varphi) + \Delta\varphi,$$

un'efemeride dandoci D e C giorno per giorno, e sommiamo tali equazioni per ciascuno dei 6 cicli, cioè di 14 in 14 mesi. Riusciremo così a 6 equazioni—somma nelle 3 sole incognite μ π Δf , e libere dai $\Delta\varphi$. Per dar maggiori coefficienti alle incognite principali π e Δf , si faccia la somma di 2 in 2 cicli, anzichè di 1 in 1. Risulteranno 3 equazioni a 3 incognite, e non ci sarà più nemmeno bisogno di minimi quadrati. Invece di sommare le equazioni diurne, si può scrivere l'equazione *media* per ciascun ciclo o gruppo di cicli, calcolando i D e C *medii* per i rispettivi intervalli.

Questa è, come si vede, la rettifica del primo metodo di sommazione impiegato dall'A. Ma avrebbe richiesto che le misure cominciate in giugno 1912, si protraessero fino al giugno 1919. Per far più presto a trovare un Δf purchessia, ma almeno logicamente corretto, potevano bastare i 4 cicli dal 1912 al 1917, sommando ciclo per ciclo, ed introducendo l'incognita $\Delta\varphi_0$. Quattro equazioni tra quattro incognite.

2° METODO. — Un metodo di sommazione che poteva dar risultati anche solo con 3 cicli era il seguente. Si aggiunga ad ogni equazione diurna quella che vale per 7 mesi dopo, o se ne sottragga quella che vale per 14 mesi dopo. Nelle equazioni sottrattive non figura φ_0 , nelle additive figura $2\varphi_0$, che si prende a quarta incognita a fianco di μ π Δf . Equazioni additive e sottrattive si trattano con i minimi quadrati.

Ma tralasciando ogni altro discorso circa la eliminazione dei $\Delta\varphi$ nella polodia chandleriana, vogliamo appurare il vero Δf dato dalle medie mensili del nostro A., in base, cioè, alla polodia vera, ed indagare quanta probabilità ci sia che esso effettivamente rappresenti una correzione di cui la costante d'aberrazione 20",47 abbia bisogno.

⁽¹⁾ Questi ed altri metodi di eliminazione dei $\Delta\varphi$ sarebbero corretti solo *formalmente*, cioè in logica connessione con la ipotesi dell'A. Ma *sostanzialmente* sono tutti falsi, non potendosi nella polodia vera, che è frutto di osservazione, statuir nulla *a priori* circa i limiti, stretti o larghi, entro cui $\Sigma\Delta\varphi$ sia sicuramente nulla o trascurabile, per il calcolo di Δf .

Dobbiamo a tal fine applicare alle 48 medie mensili l'equazione già vista nella Nota I:

$$(7) \quad \Delta\varphi_0 - t\mu - D\pi - C\Delta f = \varphi - (\varphi_0 + \Delta\varphi) \quad (1)$$

dove il $\Delta\varphi$ si attinge ai risultati del servizio internazionale. Siccome si omette il termine z , il $\Delta\varphi$ per meridiani poco discosti da quello di Greenwich s'identifica senz'altro con la x internazionale. Il calcolo è abbastanza breve, potendosi limitar i coefficienti a 2 decimali ⁽²⁾, e servirsi di piccole tavole di moltiplicazione anzichè di logaritmi. Il metodo dei min. quad. conduce dunque prontamente al risultato qui appresso:

Error medio di una media mensile di peso 1 = $\pm 0,103$			
(3)	$\varphi_0 = 16'',245$	$\Delta\varphi_0 = -0'',029$	e. m. $\pm 0'',016$
		$\mu = +0'',001$	$\pm 0'',020$
		$\pi = -0'',089$	$\pm 0'',025$
		$\Delta f = -0'',106$	$\pm 0'',025$

Qui si vede che il Δf effettivamente risultante dalle medie mensili, a parte la correzione del segno, è più che doppio di quello che il Boccardi traeva dalle sue equazioni (4) o che si sarebbe avuto dalla nostra (6) facendovi $X = 0$. Appare così anche *a posteriori* quanto erronea fosse quest'ul-

(1) Formate queste equazioni, se ne facciamo la somma, troviamo:

+ 45,5 $\Delta\varphi_0$ - 0,35 μ - 3,92 π - 4,29 Δf = + 0'',089 - 0'',769
mentre Boccardi aveva: + 4,84 Δf = + 0'',089

Se poi sommiamo separatamente le equazioni positive e le negative, le due risultanti che per la presenza della $\Delta\varphi_0$ non si riducono più ad una sola, sono:

+ 26,0 $\Delta\varphi_0$ - 3,52 μ - 0,55 π - 15,26 Δf = + 0'',716 + 0'',184
+ 19,5 $\Delta\varphi_0$ + 3,17 μ - 3,37 π + 10,97 Δf = - 0'',627 - 0'',953

L'A. scriveva in loro vece:	+ 15,82 Δf = + 0'',716
	- 10,97 Δf = - 0'',627.

Sono così messi in altro modo in evidenza gli errori dell'esaminato procedimento, i risultati del quale l'A. non si perita di paragonare a quelli di uno Struve!

(2) Scriviamo i coefficienti delle incognite con due soli decimali, e contiamo le longitudini solari in ore intere, ciò essendo pienamente sufficiente nel calcolo che abbiām per mano. Il nostro A. prende le longitudini in gradi e minuti, tenendo fin d'occhio quella piccola frazion di primo che è la *pars constans* dell'aberrazione solare!, e carica di 4 decimali i coefficienti, e di 5 i loro logaritmi (che non si sa perchè siano pubblicati). Però gli accade che curando la quinta cifra, gli riesca falsa la prima, in conseguenza dell'errore nel C del 21 luglio 1915, notato nel testo, errore che s'è naturalmente riversato per intero sull'equazione somma.

(3) Questa φ_0 di partenza è la media aritmetica delle φ_0 assunte dall'A. per le due stelle del Cigno, nella sua Nota II.

tima ipotesi, unita all'omissione del termine di parallasse. Ma più importanti ad osservare sono i tre fenomeni seguenti:

a) Il forte error medio della media mensile. Essendovi state di regola due osservazioni al giorno, ogni media mensile possiam sicuramente assumere che riposi, fatta larga parte alle lacune per cattivo tempo, sopra un *minimum* di 36 misure. Da altra parte rammentiamo dalla nostra Nota sull'onda lunare ⁽¹⁾, che l'e. m. di *una* di queste misure è 0".2. L'error medio di una media di almanco 36 misure, dovrebbe risultar dunque
$$= \frac{0".2}{1/36} = 0".033$$
, mentre qui troviamo 0".103, vale a dire più di 3 volte

tanto. Ciò vuol semplicemente dire che la (7) è *insufficiente* a rappresentare le osservazioni, ossia manca di termini non trascurabili.

b) La parallasse negativa, che *come parallasse assoluta* è naturalmente un assurdo.

c) I piccoli errori medi della parallasse e dell'aberrazione, dai quali sembrerebbe derivare qualche attendibilità ai valori trovati per tali incognite, abbenchè uno assurdo, e l'altro certamente troppo forte.

In questi tre fenomeni si rivela l'opera della perturbazione zenitale ⁽²⁾. Dobbiamo infatti immaginarci che questa si componga di parecchie onde elementari, le più delle quali affatto diverse per fase dalle onde di aberrazione e di parallasse. Tali onde sono assolutamente refrattarie alla rappresentazione mediante la (7), e danno luogo ai forti residui di cui l'error

(¹) Rend. Acc. Lincei, XXVII, pag. 213. Per evitare che si seguiti ad insistere sopra errori elementari, solo perchè non esplicitamente confutati, vogliamo avvertire che in quella Nota, mostrando le misure di latitudine dell'A. insensibili all'onda lunare, dimostrammo anche, implicitamente, che da esse non può trasparire nessun effetto di nutazione diurna dell'asse di rotazione della Terra rispetto allo sferoide. Le stesse osservazioni di Pino potrebbero poi (sempre nei limiti della loro esattezza) far fede dell'assenza di una sensibile nutazione diurna del detto asse rispetto allo spazio, mancandovi ogni accenno al periodo euleriano dei 10 mesi. Questi teoremi dovrebbero essere familiari a chi si mette a scrivere di polodia e di marea lunare.

Avvertiamo, inoltre, che nelle stazioni internazionali, le misure intese alla scoperta di una eventualmente sensibile nutazione diurna, non furono quelle del programma ordinario dei *due gruppi*, bensì quelle dei *quattro gruppi* stellari, ove l'intervallo fra il primo e il quarto è di 6 ore, quanto bastava cioè per mettere in luce circa i $\frac{4}{3}$ della intera amplitudine della nutazione. Se questa non fu trovata, è perchè rientra nella categoria delle onde interferenti con la rifrazione zenitale, mentre la sua parte di maggior coefficiente si riversa sopra le declinazioni stellari medie, e non è quindi osservabile.

(²) In verità le osservazioni che esaminiamo non sono tante nè così precise come occorrerebbe perchè i notati fenomeni si dovessero attribuir senz'altro a variazioni effettive del zenit apparente. Gli errori stessi di misura possono dar origine, nel nostro caso, ad onde spurie, imitanti quelle di aberrazione e parallasse, ma da ciò noi vogliamo far astrazione, per descrivere il fenomeno, qual seguirebbe a presentarsi anche nel caso ideale di misure senza errori.

medio della media mensile è espressione compendiata; residui che decisamente rivestono carattere sistematico, con accenno al periodico ⁽¹⁾. Ma altre onde zenitali, che hanno fase poco diversa dall'aberrazione o dalla parallasse, la equazione (7) è ben in grado di rappresentarle, poichè esse restano *assorbite* dai termini $D\pi$ e $C\Delta f$, i quali possono quindi assumere un'apparenza di realtà, ossia dar luogo a piccoli errori medi nei valori di π e Δf , senza che effettivamente vi sia nè parallasse stellare, nè residuo sensibile di aberrazione. In questa seconda categoria di onde *rappresentabili*, dobbiamo mettere anche quelle che rispetto alla parallasse o all'aberrazione hanno una differenza di fase di 180° o 12^h : le quali nel primo caso si daranno a conoscere per ciò che le loro amplitudini risulteranno negative, laddove nel secondo caso, cioè per l'aberrazione, questo criterio non regge, essendo Δf suscettibile, senza mutar natura, dell'uno e dell'altro segno.

La parallasse negativa $-0'',089$, risultante per la stella $1/2 (\alpha + \delta)$ Cygni dalle osservazioni del Boccardi, vuol dunque semplicemente dire che fra le onde zenitali di Pino Torinese, ce n'è stata una della forma $0'',089 \times 0,91 \cos(\odot + 16^h + 12^h)$, essendo, come sopra s'è visto, $0,91 \cos(\odot + 16^h)$ il coefficiente di parallasse della detta stella. L'onda è però da considerare come straordinariamente amplificata dagli errori di osservazione, un'onda zenitale vera non superando di solito (in stazioni continentali) i 2 e 3 cent. di secondo ⁽²⁾.

⁽¹⁾ I detti residui nel senso II-I membro, sono, in centesimi di secondo:

+28, -5, -6, +11, +16, +18, +6, -6, -13, -20, -8, +5, +9, +1,
-9, -6, -9, -5, -10, -6, -9, +1, -7, -17, +2, +13, -3, -5, +2,
-7, +1, 0, -3, -3, -9, +1, +4, +1, +9, +10, -6, -12, -7, +1,
+2, 0, +11, +26.

La loro origine mal si cercherebbe nelle x internazionali, messe a base del calcolo, poichè su queste le perturbazioni zenitali di ogni singola stazione agiscono solo per la parte che non è comune alle altre (la parte comune si riversa su z) e quindi a guisa di errori accidentali, in media da tutte le stazioni si elidono.

Abbiamo avuto curiosità di ripetere il calcolo includendo nei $\Delta\varphi$ il termine z , ciò che equivale a tener conto (almeno nelle misure notturne), oltre che del tenue scorrimento periodico del centro di gravità terrestre lungo l'asse, anche e soprattutto di quella parte di refrazione zenitale esterna che è comune alle stazioni internazionali, poichè in queste tanto per la modellazione degli ambienti, quanto per la limitazione delle misure alle ore notturne, sono pressochè completamente rimosse la seconda e terza causa di perturbazione zenitale. Abbiamo trovato: e. m. di una media mensile $= \pm 0'',108$, $\Delta\varphi_0 = -0'',063 \pm \pm 0'',017$, $\mu = +0'',017 \pm 0'',021$, $\pi = -0'',104 \pm 0'',026$, $\Delta f = -0'',091 \pm 0'',026$. L'e. m. della media, variato pochissimo, fa capire che i residui sono rimasti presso a poco gli stessi. A preferenza, dunque, essi son dovuti a refrazione camerale ed all'effetto di illuminazione del fondo del cielo; però si intrecciano con altri errori così che non vi si può scorgere nessun periodo definito. I primi 6 resti sembrano anche influenzati dalla diversità dell'istrumento che servì da giugno a dicembre 1912.

⁽²⁾ A falsare l'amplitudine della detta onda contribuisce poi naturalmente anche l'essere la (7) limitata a 2 soli termini periodici.

Or se la parallasse negativa è dovuta per intera alla perturbazione zenitale, diventa ovvio il sospettare che l'onda la cui semiamplitudine è $\Delta f = -0''.106$ sia anch'essa un'onda zenitale che *tiene luogo di aberrazione* senza che con l'aberrazione abbia in realtà niente a che vedere.

La grande amplitudine di questa pseudo-aberrazione non è del resto un prodotto genuino della perturbazione zenitale, poichè ha contribuito ad esagerarla la *scelta* che il Boccardi ha fatto delle misure da assoggettar al suo calcolo, come pure l'arbitraria distribuzione di pesi alle medie mensili, i quali noi abbiain mantenuti inalterati. Un Δf *più plausibile*, cioè più piccolo, ed anzi, segno a parte, della grandezza appunto che il nostro A. voleva far risultare dalle sue equazioni (4) si ottiene, infatti quando si rinunzi a qualsiasi scelta, e *tutte* le misure fatte e registrate vengano prese in conto.

Abbiamo creduto prezzo dell'opera far anche quest'altro calcolo, e non solo per le due stelle del Cigno *separatamente*, ma anche per ciascuna delle due altre stelle, limitandoci al triennio 1913-15, già da noi studiato in ordine all'onda lunare ⁽¹⁾.

Perchè le equazioni venissero tutte dello stesso peso, abbiain fatto riposare ciascuna sopra 20 misure consecutive, procedimento che non espone al pericolo di dover ricorrere a medie *filtrizie*, come ne ha adoperate il nostro A. Naturalmente, in prossimità di quelle date, ove si presentano interruzioni o lacune, abbiain dovuto contentarci di formar le medie con un numero di misure talora parecchio minore di 20. Ma queste medie difettive, che si hanno solo per β Aurigae (4 su 17) e ψ Ursae maj. (4 su 18), sono tanto poche, che non abbiain esitato a dar anche ad esse il peso 1, senza tema che i risultati potessero risentirne alterazione.

Riuniamo senz'altro i risultati stessi nel seguente quadro:

	N	M	φ_0	$\Delta\varphi_0$	\pm	μ	\pm	π	\pm	Δf	\pm
α Cygni . . . 23	$\pm 0,088$	16''21	-0,009	0,018	-0,037	0,027	-0,163	0,029	-0,085	0,030	
δ Cygni . . . 20	0,066	16,10	-0,011	0,016	-0,022	0,022	-0,057	0,025	-0,013	0,024	
ψ Ursae maj 18	0,058	16,45	-0,008	0,017	-0,015	0,020	-0,143	0,037	+0,066	0,031	
β Aurigae . . 17	0,111	16,24	-0,018	0,030	-0,062	0,039	-0,576	0,127	-0,014	0,100	

Sotto N sono indicati i numeri delle equazioni risolte per le diverse stelle, e la colonna M dà l'error medio di una media di 20 misure nei quattro casi. Questo errore sarebbe da attendersi $= \frac{0'',2}{\sqrt{20}} = 0'',045$, onde

vediamo che in nessuna stella esso è portato al triplo, come accadeva per le medie di Boccardi. La rappresentazione delle osservazioni mediante la (7) è quindi miglierata, e se, come crediamo, l'insieme di *tutte* le osservazioni

(1) Le osservazioni sono attinte alle Mem. della pontif. Accad. N. L., vol. XXXII, serie II, vol. I, e da fascicolo edito dall'A. Torino, 1916.

merita più fiducia che qualsiasi sistema di osservazioni scelte. il miglioramento in parola vuol dire che le onde zenitali *irrappresentabili* erano meno rilevanti di quello che dalle medie dell'A. appariva. Però, anche così attenuati, gli M. ossia i residui della rappresentazione, sono sempre troppo grandi, e seguitano a deporre sulla insufficienza della equazione (7).

È da segnalare la radicale diversità dei Δf di α e δ Cygni, dove si manifesta la terza causa di perturbazione, menzionata nella Nota I, cioè il diverso variare lungo l'anno solare, dell'effetto d'illuminazione del fondo del cielo, per stelle di diversa luce. Curioso è poi che il medio aritmetico dei due Δf sia, prescindendo dal segno, esattamente eguale al Δf che il Boccardi erroneamente traeva in media dalle sue equazioni (4). Ma appare anche che la distanza dei due Δf è tale da non consentire la razionale formazione di un medio, e quindi neanche di fondere in medie le misure delle due stelle, come l'A. ha fatto.

Effetto costante della perturbazione zenitale sono le quattro pseudo-parallassi, o parallassi negative, il qual fenomeno è notabile specialmente in α Cygni, la stella più assiduamente osservata, ove il valore fortissimo $-0''.163$ si presenta con un e. m. minore della sua 5^a parte. È dunque qualche cosa di ben reale (¹), mentre dubbia è l'onda corrispondente nella vicina δ Cygni. Reale è pure la pseudo-parallasse in ψ Ursae, ma forse illusoria affatto in β Aurigae, presso cui la determinazione doveva anche riuscire assai incerta, per la piccolezza del fattore di parallasse ($h = 0.37$).

In quanto a Δf , la stella *meglio osservata*, δ Cygni, ce lo presenta con un e. m. maggiore della stessa incognita; è dunque un equivalente pratico di zero, e lo stesso può dirsi dei Δf di ψ Ursae e β Aurigae; di tal che non resta ad aspirare all'attendibilità che il forte Δf di α Cygni, e la merita forse, ma non sotto titolo di aberrazione, come sopra spiegammo.

In definitiva dunque, anche prescindendo che i quattro Δf in gran parte si compensano, nulla possiamo trovar in loro che anche solo lontanamente accenni alla necessità di un ritocco nella costante dell'aberrazione. E neanche possiam ritenerli quali Δf *peculiari* alle quattro stelle, essendo dubbio, se non già da escludere, che prolungando la serie delle osservazioni, essi convergerebbero verso valori-limiti definiti.

È bene, terminando, rammentare che il pregiudizio del Δf positivo, cui il nostro A. ha erroneamente creduto poter venire in sostegno con le poche osservazioni di Pino Torinese, sembrò, qualche ventina d'anni or sono, seriamente fondato sopra la stessa gran mole dei lavori internazionali per la polodia, quando si videro venir fuori, in tutte e 6 le stazioni settentrionali, « errori di chiusura » (*schlussfehler*) negativi. Ciò sembrava significare che

(¹) Sempre astraendo dalla possibilità che si tratti di onda spuria, prodotta da errori sistematici.

sistematicamente ogni notte. il primo gruppo di stelle desse una latitudine minore che il secondo, appunto come sarebbe dovuto accadere con una costante d'aberrazione troppo piccola, in conseguenza dell'innalzarsi che fa l'*apice* (verso cui l'aberrazione è diretta) in quasi tutte le ore notturne. Senonchè, intervenute le 2 stazioni australi, vi si riscontrarono *schlussfehler* positivi, e sensibilmente eguali, in valore assoluto, a quelli delle stazioni settentrionali, ciò che bastò a far escludere la provenienza loro dall'aberrazione, e pose anzi il suggello sulla perfetta sufficienza della costante $20'',47$ ai bisogni dell'astronomia attuale ⁽¹⁾.

Idromeccanica. — *Sul moto di un vortice puntiforme.* Nota I di B. CALDONAZZO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si consideri un velo piano indefinito di liquido perfetto, limitato da una parete rigida estendentesi indefinitamente nei due sensi, con direzioni asintotiche determinate. È stato già studiato il moto provocato da un vortice puntiforme in detto velo ed il moto del vortice stesso ⁽²⁾.

Sostanzialmente la questione è condotta alla determinazione di una funzione che rappresenti in modo conforme il campo A del moto in un semipiano. Con questa Nota mette in rilievo la circostanza (il che a mia cognizione non è stato ancor fatto) che tale funzione è suscettibile di una notevole inter-

⁽¹⁾ Vedi *Resultate des Intern. Breitendienstes*, Bd. III (1909), pag. 66; Bd. IV (1911), pag. 251. Nel 1903 la correzione $\Delta f = +0'',042$ fu effettivamente apportata, abbenchè l'e. m. ($\pm 0'',015$) ne ammontasse a più del terzo, ma in seguito all'esperienza delle stazioni australi, si tornò subito al $20'',47$, che non c'era ragione sufficiente d'abbandonare.

Gli *schlussfehler* furono una prima imperfetta apparizione della refrazione zenitale. Nel nuovo metodo di calcolo della polodia, adottato dal prof. Wanach, essi più non figurano, ma in loro vece si studiano direttamente le differenze sistematiche fra le osservazioni di latitudine di prima sera e quelle di notte inoltrata, differenze che si è scoperto esser della forma $M + \alpha \sin(\odot + N)$. Così da una parte gli antichi *schlussfehler* sono stati identificati con il valore di $12M$ [12 essendo i gruppi stellari] e dall'altra è stata potuta mettere in evidenza una delle onde della rifrazione zenitale. L'onda è diurna, ma si sposta continuamente rispetto alle stelle fino a tornare su sè stessa in un anno, assumendo forma di termine annuo nelle declinazioni stellari. L'amplitudine ne è maggiore nelle stazioni continentali che nelle insulari. Ciò che teoricamente fa distinguere detta onda dalla nutazione diurna è il non dar luogo, nella latitudine misurata con una sola stella, a periodo quindicinale. Nella nuova forma di calcolo della polodia sono scomparsi anche i termini α , con che è tolta ai misuratori di latitudine il modo di purgar questa della refrazione zenitale media, nelle osservazioni notturne. Ma è poco male, poichè uno studio diretto della detta refrazione, come pure delle altre cause di variazione del zenit apparente, deve esser fatto in ogni osservatorio che si occupa di determinazioni di latitudine.

⁽²⁾ E. J. Routh, *Some Applications of Conjugate Functions* [Proc. Lond. Math. Soc., 12 (1881), pag. 72]; cfr. A. E. H. Love, [Enzykl. der math. Wiss., IV, 2, pag. 111].

pretazione idrodinamica e che cioè essa è atta ad individuare in A una corrente C stazionaria irrotazionale del liquido stesso ed avente la parete rigida per linea di flusso.

Perciò, ove accanto al moto provocato dal vortice si consideri quello di una corrente *fittizia* C , il primo moto e quello del vortice stesso (è di quest'ultimo soltanto che mi occupo) si possono esprimere ed in modo semplice mediante gli elementi del moto fittizio di C .

Ne segue che per tutti quei campi A , pei quali è stata determinata una corrente C , risulta senz'altro determinato il moto di un vortice puntiforme nei campi stessi. Indipendentemente poi dalla configurazione del campo, mi è facile stabilire un raffronto tra le linee di flusso di C e le traiettorie del vortice, e mettere in evidenza che nelle eventuali posizioni d'arresto di questo le sue traiettorie devono avere un contatto con le linee di flusso di C . La stabilità dell'arresto dipende dal comportamento della curvatura di quest'ultime linee.

Il vortice, inoltre, si muove come se appartenesse ad una corrente vorticoso stazionaria, lungo ciascuna linea di flusso della quale la rotazione della velocità si conserva costante.

In una prossima Nota riprenderò la stessa questione facendo intervenire la corrente C non più in modo fittizio, ma studiando la effettiva sovrapposizione del suo moto a quello del vortice.

1. Riferiamo i punti di A ad un sistema ortogonale cartesiano sinistro $0, x, y$ e poniamo $z = x + iy$. Il campo A si può rappresentare in modo conforme sul semipiano $Y \geq 0$ della variabile complessa $Z = X + iY$, facendo corrispondere, a due a due, tre punti del contorno dei due campi. Sia $Z = Z(z)$ la relazione analitica che permette il passaggio da A al semipiano ed I l'intensità del vortice. Il moto di questo è definito dalla seguente funzione di corrente:

$$(1) \quad \psi^*(x, y) = \frac{I}{2\pi} \left\{ \log Y(x, y) - \log \left| \frac{dZ}{dz} \right| \right\},$$

fissata una determinazione pei logaritmi, x ed y essendo le coordinate del vortice ⁽¹⁾.

Sia φ il potenziale cinetico di una corrente C , ψ la funzione di corrente: quest'ultima cresca indefinitamente lungo una generica linea $\varphi = \text{cost.}$ a partire dal valore $\psi = 0$ sulla parete rigida e si fissi una determinazione per φ . Come è noto, $\varphi + i\psi$ è funzione analitica di z , $\varphi + i\psi = f(z)$, tale che, u e v essendo le componenti cartesiane della velocità V di C ,

$$(2) \quad \frac{df}{dz} = u - iv = w.$$

⁽¹⁾ Loc. cit. ⁽¹⁾ a pag. 191.

Dopo ciò è manifesto che ponendo $Z = f$ si ottiene una rappresentazione conforme di A sul semipiano $Y = \geq 0$. Possiamo quindi porre in (1) $Z = f$; tenendo conto della (2) si ottiene

$$(3) \quad \psi^* = \frac{I}{2\pi} \log \frac{\psi}{V}.$$

dalla quale seguono per le componenti u^* e v^* della velocità \mathbf{V}^* del vortice le espressioni

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{u}{\psi} - \frac{\partial \log V}{\partial y} \right\}, \quad v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{v}{\psi} + \frac{\partial \log V}{\partial x} \right\}.$$

Queste si possono riassumere in forma complessa nella seguente:

$$(4) \quad w^* = u^* - iv^* = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{w}{\psi} - i \frac{d \log w}{dz} \right\},$$

in cui è bene notare che w^* non è funzione analitica di z in causa del primo termine tra le parentesi.

Contiamo l'angolo che \mathbf{V} fa con l'asse Ox positivamente nel senso antiorario, negativamente nel senso opposto e scegliamo una sua determinazione \mathcal{J} . Tenendo presente che $i \log w = \mathcal{J} + i\tau$ ($\tau = \log V$ reale) è funzione analitica di z , alla (4) si può dare la forma vettoriale seguente:

$$(4') \quad \mathbf{V}^* = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\psi} \mathbf{V} - \text{grad } \mathcal{J} \right\}.$$

Da questa, poichè è $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, si deduce ⁽¹⁾

$$(5) \quad \text{rot } \mathbf{V}^* = \frac{I}{2\pi \psi^2} \mathbf{V} \wedge \text{grad } \psi = -\frac{I}{2\pi} \left(\frac{V}{\psi} \right)^2 \mathbf{k},$$

\mathbf{k} essendo il vettore unitario costituente coi vettori unitari \mathbf{i} e \mathbf{j} , che individuano gli assi Ox, Oy , una terna ortogonale sinistrorsa.

2. Sono traiettorie del vortice le linee $\psi^* = \text{cost.}$; vale a dire, per la (3), le linee

$$(6) \quad V = a\psi,$$

(1) Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Anal. Vectorielle*, I, 41, [2].

a essendo una costante positiva o nulla. Nel caso estremo $a = \infty$ si ha come traiettoria limite la parete rigida stessa $\psi = 0$. Si noti che le traiettorie del vortice sono indipendenti dalla sua intensità I , esse dipendono soltanto dalla configurazione del campo.

Se si segue il vortice lungo la sua traiettoria, posto $\mathbf{V} = V\mathbf{t}$, per la (6) la (4') diviene

$$(7) \quad \mathbf{V}^* = \frac{I}{2\pi} \left\{ a\mathbf{t} - \text{grad } \vartheta \right\} :$$

quindi \mathbf{V}^* risulta di un vettore parallelo a \mathbf{V} di modulo costante e di un vettore proporzionale a $\text{grad } \vartheta$. La (5) diviene infine

$$\text{rot } \mathbf{V}^* = -\frac{I}{2\pi} a^2 \mathbf{k} ,$$

cioè il vortice si muove come se appartenesse ad una corrente vorticoso, lungo ciascuna linea di flusso della quale $\text{rot } \mathbf{V}^*$ è costante.

3. Sia s l'arco contato su una generica linea $\psi = \text{cost.}$ positivamente nel senso di \mathbf{V} , a partire da un'origine prefissata, \mathbf{n} il vettore unitario, normale a tale linea, definito da $\mathbf{n} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{t}$. Poichè ϑ e τ sono funzioni armoniche associate, si ha

$$\text{grad } \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \mathbf{t} - \frac{\partial \tau}{\partial s} \mathbf{n} .$$

Per questa la (7) diviene

$$(8) \quad \mathbf{V}^* = \frac{I}{2\pi} \left\{ \left(a - \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right) \mathbf{t} + \frac{\partial \tau}{\partial s} \mathbf{n} \right\} ;$$

si ha così la scomposizione di \mathbf{V}^* nei suoi componenti parallelo e normale a \mathbf{V} . Poichè quest'ultimo generalmente è diverso da zero, le traiettorie del vortice sono in generale distinte dalle linee di flusso di \mathbf{C} , come del resto segue anche dalla (6). Si noti che è $\frac{\partial \tau}{\partial s} \geq 0$ a seconda che lungo la linea $\psi = \text{cost.}$ V cresce o decresce nel senso del moto di \mathbf{C} . Nel caso intermedio $\frac{\partial \tau}{\partial s} = 0$, che è verificato in particolare nei punti ove V ha un massimo o un minimo, la traiettoria del vortice ha un contatto con la linea $\psi = \text{cost.}$

4. La velocità del vortice può eventualmente annullarsi se esistono punti di A in cui

$$w = i\psi \frac{d \log w}{dz} , \quad \text{od anche} \quad V = \psi \text{ grad } \vartheta ,$$

come segue da (4) e (4'), oppure, ciò che fa lo stesso, nei punti in cui

$$V = \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial s}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0.$$

Perciò, ove si segua il vortice lungo una sua determinata traiettoria $V = a\psi$, sono punti d'*arresto* pel vortice quelli in cui la curvatura delle linee $\psi = \text{cost.}$ passanti per essi ha il valore a e la curvatura delle linee $\varphi = \text{cost.}$, passanti pure per essi è nulla ⁽¹⁾. Quest'ultima condizione, che è verificata in particolare nei punti ove le linee equipotenziali hanno un flesso, pone in evidenza che l'arresto può verificarsi soltanto nei punti ove le traiettorie del vortice e le linee $\psi = \text{cost.}$ hanno un contatto.

Se in un intervallo della traiettoria del vortice immediatamente contiguo ad un punto d'arresto Q , la velocità tende a ricondurre il vortice in Q , l'arresto è *stabile*; altrimenti è *instabile* ⁽²⁾.

Nel 1° caso si avrebbe un moto *stazionario*, provocato in A dalla presenza di un vortice fisso.

Poichè in un punto di arresto la traiettoria del vortice tocca una linea $\psi = \text{cost.}$, è necessario e sufficiente per la *stabilità* del vortice in tal punto che vi sia negativa la derivata secondo s della componente di V^* parallela a V :

$$\frac{I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \left(a - \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right) = - \frac{I}{2\pi} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} < 0,$$

essendo a costante lungo s , vale a dire:

$$I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} > 0.$$

⁽¹⁾ $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$ è manifestamente la curvatura delle linee di flusso di C ; poichè queste linee assieme alle linee equipotenziali $\varphi = \text{cost.}$ costituiscono un sistema isoterma, segue subito che $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ è la curvatura delle linee equipotenziali.

⁽²⁾ Escludiamo il caso singolare in cui $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ è nulla lungo un tratto finito di linea di flusso di C , interno ad A . Questa circostanza è verificata (mi limito ad accennarlo) solamente quando essa vale per tutta la linea di flusso non solo ma in tutto il campo A e precisamente nel caso in cui la parete rigida è rettilinea. In tal caso l'arresto è possibile *indifferentemente* in tutti i punti della linea $\psi = \text{cost.}$ che coincide con una traiettoria del vortice.

Idromeccanica. — *Sul moto variabile nei canali a fondo orizzontale.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio TULLIO LEVIVITA.

Chiedo il permesso di intrattenere l'Accademia sopra un argomento che formò, quale caso particolare, oggetto di due Note precedenti ⁽¹⁾.

Intendo in questa Nota di completare il risultato contenuto in quelle, riferendomi al caso in cui trattasi non più di piccoli moti ondosi, ma di moti irrotazionali (regolari) di qualsiasi natura.

1. Trattandosi di moto piano verticale, conviene ancor qui riferirsi ad una coppia di assi cartesiani $O; x, y$ coll'asse x orizzontale e coincidente col fondo del canale e l'asse y verticale ascendente; la scelta dell'origine è indifferente. — Sia l il pelo libero che, in condizioni statiche, è una retta parallela al fondo e che ne dista di h . In condizioni di movimento l muta forma, che in generale è variabile col tempo t ; il campo ove ha sede il moto è dunque una striscia indefinita C , compresa tra il fondo $y = 0$ e la linea l .

Supposto il moto regolare ed irrotazionale esistono un *potenziale di velocità* $\varphi(t; x, y)$ e una *funzione di corrente* $\psi(t; x, y)$, regolari in C in qualunque istante e che, considerate quali funzioni degli argomenti x e y , sono armoniche associate, per cui

$$f = \varphi + i\psi,$$

risulta funzione di $z = x + iy$, oltre che di t ; inoltre, dette u, v le componenti della velocità in un punto e in un istante generico, si ha pure

$$w = u - iv = w(t; z),$$

e

$$w = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

2. Tanto sul fondo $y = 0$, quanto sul pelo libero l , trattandosi di linee di flusso, deve ψ conservare, in un istante generico, il medesimo valore. Assunto, com'è ben lecito,

$$\psi = 0, \quad \text{per } y = 0,$$

e chiamando $q(t)$ la portata, corrispondente all'istante t , si ha

$$\psi = q(t), \quad \text{sopra } l.$$

⁽¹⁾ Cisotti, *Equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità* [questi Rendiconti, vol. XXVII (1918), Nota I, pag. 255; Nota II, pag. 312].

La linea libera l è di più isobarica, per cui, assunta $= 1$ la densità del liquido, deve aversi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + g y = \text{funzione di } t, \text{ sopra } l,$$

essendo $V^2 = u^2 + v^2 = w^2$ e designando g il valore dell'accelerazione di gravità.

3. Conviene trasformare quest'ultima condizione nel modo seguente. Si rilevi anzitutto che, fissato t , lungo l tanto φ , quanto V , nonchè y si possono ritenere funzioni dell'arco s (contato a partire da un punto generico, positivamente nel senso del flusso), per cui notando che $V = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$, dalla precedente derivando prima rispetto ad s , moltiplicando poi per $2V$ e notando che $V \frac{\partial y}{\partial s} = v$, si ottiene infine

$$\frac{\partial V^2}{\partial t} + V \frac{\partial V^2}{\partial s} + 2gv = 0, \text{ sopra } l.$$

4. Poniamo:

$$z = h z^*, \quad f = q f^*, \quad f^* = \varphi^* + i \psi^*;$$

per la relazione del n. 1 si ha

$$w = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{q}{h} \frac{\partial f^*}{\partial z^*} = c w^*,$$

avendo posto

$$c = \frac{q}{h}, \quad w^* = \frac{\partial f^*}{\partial z^*}.$$

In tal modo z^*, f^*, w^* sono puri numeri, c rappresenta la velocità di una corrente di profondità h e di portata q .

Avendosi $V = c V^*$, $v = c v^*$, la relazione del n. prec. si può scrivere:

$$2c' V^{*2} + c \frac{\partial V^{*2}}{\partial t} + c^2 V^* \frac{\partial V^{*2}}{\partial s} + 2g v^* = 0, \text{ sopra } l,$$

avendo indicato con c' la $\frac{\partial c}{\partial t}$.

5. Per la $z = h z^*$ il campo C viene rappresentato conformemente in un campo C^* omotetico al primo, h essendo il rapporto di omotetia. D'altra parte la relazione

$$f^* = f^*(z^*),$$

consente di rappresentare il campo C^* nella striscia S^* : $0 \leq \psi^* \leq 1$, $-\infty \leq \varphi^* \leq +\infty$, di guisa che riferendosi nuovamente al campo C , per mezzo della $z = hz^*$, al fondo e al pelo libero del canale corrispondono in S^* rispettivamente le rette $\psi^* = 0$ e $\psi^* = 1$.

Riferendoci senz'altro alla striscia S^* conviene trasformare l'ultima condizione del n. 4; basta notare che per $\psi^* = 1$ dev'essere $[n. 1 \text{ e } 4]$:

$$ds = |dz| = \frac{|df|}{|w|} = h \frac{\partial \varphi^*}{\partial w^*} = h \frac{\partial \varphi^*}{\partial V^*},$$

per cui la condizione in discorso può scriversi:

$$2c' + c \frac{\partial \log V^{*2}}{\partial t} + \frac{c^2}{h} \frac{\partial V^{*2}}{\partial \varphi^*} + 2g \frac{v^*}{V^{*2}} = 0, \text{ sopra } l.$$

6. Sul fondo $y = 0$ dev'essere $v = 0$ e quindi $v^* = 0$, per cui è

$$v^* = 0 \quad \text{per} \quad \psi^* = 0,$$

cioè la funzione $w^* = u^* - iv^*$ è reale sull'asse reale del piano $\varphi^* + i\psi^*$.

In base al principio di Schwarz è consentita la continuazione analitica della funzione w^* nella striscia S^* : $-1 \leq \psi^* \leq 0$, $-\infty \leq \varphi^* \leq +\infty$, immagine riflessa di S^* rispetto all'asse reale. Per cui, se in un generico punto $\varphi^* + i\psi^*$ di S^* è

$$w^*(t; \varphi^* + i\psi^*) = u^* - iv^*,$$

nel punto $\varphi^* - i\psi^*$, simmetrico del primo rispetto all'asse reale, si ha

$$w^*(t; \varphi^* - i\psi^*) = u^* + iv^*.$$

Da queste si ricava, riferendosi ai punti di l ove $\psi^* = 1$,

$$V^{*2} = w^*(t; \varphi^* + i) \cdot w^*(t; \varphi^* - i),$$

$$\frac{2v^*}{V^{*2}} = -i \left\{ \frac{1}{w^*(t; \varphi^* + i)} - \frac{1}{w^*(t; \varphi^* - i)} \right\},$$

l'ultima relazione del n. prec. può scriversi pertanto:

$$2c' + c \frac{\partial}{\partial t} \log \{ w^*(t; \varphi^* + i) \cdot w^*(t; \varphi^* - i) \} +$$

$$+ \frac{c^2}{h} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} \{ w^*(t; \varphi^* + i) \cdot w^*(t; \varphi^* - i) \} -$$

$$- ig \left\{ \frac{1}{w^*(t; \varphi^* + i)} - \frac{1}{w^*(t; \varphi^* - i)} \right\} = 0.$$

7. La precedente, ricavata per φ^* reale, rimane valida necessariamente per qualunque valore dell'argomento appartenente al campo di esistenza. Si ha dunque, scrivendo f^* al posto di φ^* ,

$$2c' + c \frac{\partial}{\partial t} \log \left\{ w^*(t; f^* + i) \cdot w^*(t; f^* - i) \right\} + \\ + \frac{c^2}{h} \frac{\partial}{\partial f^*} \left\{ w^*(t; f^* + i) \cdot w^*(t; f^* - i) \right\} - \\ - ig \left\{ \frac{1}{w^*(t; f^* + i)} - \frac{1}{w^*(t; f^* - i)} \right\} = 0.$$

La questione dipende da una funzione reale c di t e da una funzione $w^*(t; f^*)$ reale sull'asse reale, regolare nella striscia $S^* + S'^*$ e soddisfacenti alla precedente equazione mista, cioè differenziale e alle differenze finite. Viceversa ogni coppia di funzioni $c(t)$ e $w^*(t; f^*)$ soddisfacenti alla precedente equazione e di più la seconda reale sull'asse reale, soddisfa alle volute condizioni al fondo e al pelo libero; la precedente equazione è pertanto caratteristica dei moti irrotazionali di un liquido pesante in un canale a fondo orizzontale.

8. Se si tratta di moti permanenti, per l'indipendenza esplicita dal tempo t , l'equazione caratteristica si semplifica nella seguente:

$$\frac{c^2}{h} \frac{d}{df^*} \left\{ w^*(f^* + i) \cdot w^*(f^* - i) \right\} - ig \left\{ \frac{1}{w^*(f^* + i)} - \frac{1}{w^*(f^* - i)} \right\} = 0.$$

Ripassando alle variabili naturali, cioè ponendo [n. 4]

$$f^* = \frac{f'}{q} = \frac{f}{ch}, \quad w^* = \frac{w}{c},$$

si ottiene

$$\frac{d}{df} \left\{ w(f + iq) \cdot w(f - iq) \right\} - ig \left\{ \frac{1}{w(f + iq)} - \frac{1}{w(f - iq)} \right\} = 0,$$

che è l'equazione già stabilita da Levi-Civita ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Levi-Civita, *Sulle onde progressive di tipo permanente* [questi Rendiconti, vol. XVI (1907), pag. 783].

Matematica. — *Sulle equazioni integrali*. Nota VI di PIA NALLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

21. Siano μ_1, μ_2, \dots costanti caratteristiche proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ e $\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \dots$ le corrispondenti funzioni caratteristiche; supponiamo che tra le μ_n sia contenuto lo zero, se questo è una costante caratteristica propria.

Dimostriamo che le due costanti d e h , determinate: la prima al n. 13 della Nota II e la seconda al n. 19 della Nota III, soddisfano alla disuguaglianza $\frac{1}{h} \leq d$, qualunque sieno i valori V ed X . Ci occuperemo poi in particolare del caso in cui $hd = 1$ ⁽¹⁾.

22. Per potere parlare delle due costanti d e h bisogna supporre

$$D_1(s, t) \neq 0.$$

Ricordiamo la relazione (4) della Nota I:

$$\int_a^b g_n(s) f_m(s) ds = \int_a^b g_{n-r}(s) f_{m+r}(s) ds,$$

che lega le iterate di due funzioni $g_0(s)$ e $f_0(s)$, e, fissato n , prendiamo $f_0(v) = B_n(v, s)$, $g_0(v) = D_1(v, t)$, dove s e t si tengono costanti.

Avremo, per $p \leq n - 1$ e $q > 0$,

$$f_p(v) = B_{n-p}(v, s), \quad g_q(v) = D_{q+1}(v, t),$$

quindi l'eguaglianza

$$\int_a^b f_0(v) g_{m-1}(v) dv = \int_a^b f_{n-1}(v) g_{m-n}(v) dv$$

diventa

$$\int_a^b B_n(v, s) D_m(v, t) dv = \int_a^b B_1(v, s) D_{m-n+1}(v, t) dv,$$

e siccome $B_1(v, s)$ non è altro che $D_1(v, s)$ e per la (24) della Nota II si ha

$$\int_a^b D_1(v, s) D_{m-n+1}(v, t) dv = D_{m-n+2}(s, t) - k(s) D_{m-n+1}(s, t),$$

sarà

$$D_{m-n+2}(s, t) - k(s) D_{m-n+1}(s, t) = \int_a^b B_n(v, s) D_m(v, t) dv.$$

⁽¹⁾ A questo proposito non è inutile far notare che se zero è una costante caratteristica propria, il valore di d , determinato nella Nota II, non cambia introducendo nella successione delle μ_n il termine zero, quando questo non è già contenuto nella successione stessa.

Facendo qui $m = n = 2r$ troviamo

$$(41) \quad D_2(s, t) - k(s) D_1(s, t) = (hd)^r \int_a^b \frac{B_{2r}(v, s)}{h^r} \frac{D_{2r}(v, t)}{d^r} dv.$$

Se fosse $hd < 1$, siccome l'integrale del secondo membro al tendere di r ad ∞ converge in media verso $\int_a^b B(v, s) D(v, t) dv$, il secondo membro della (41) convergerebbe in media verso zero, quindi si avrebbe

$$D_2(s, t) - k(s) D_1(s, t) = 0, \quad \text{cioè} \quad \int_a^b D_1(v, s) D_1(v, t) dv = 0$$

e finalmente $D_1(s, t) = 0$, contrariamente al supposto.

Sarà dunque $hd \geq 1$, come volevamo dimostrare.

Supponiamo ora $hd = 1$.

Dalla (41) si concluderebbe ancora $D_2(s, t) - k(s) D_1(s, t) = 0$ se una delle due funzioni $B(s, t)$, $D(s, t)$ fosse nulla: queste due funzioni saranno dunque entrambe non identicamente nulle. La (41) ci dà, facendo tendere r ad ∞ ,

$$(42) \quad \int_a^b D_1(v, s) D_1(v, t) dv = \int_a^b B(v, s) D(v, t) dv.$$

Se una sola delle due costanti $\pm \sqrt{d}$ è costante caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, siccome $\sqrt{d} D(s, t)$ e $\sqrt{h} B(s, t)$ (\sqrt{d} e \sqrt{h} avendo lo stesso segno) sono entrambe funzioni caratteristiche corrispondenti alla costante \sqrt{d} , avremo

$$\sqrt{d} D(s, t) = \sqrt{h} B(s, t) = \Gamma(s, t)$$

e la (42) ci darà

$$\int_a^b D_1(v, s) D_1(v, t) dv = \int_a^b \Gamma(v, s) \Gamma(v, t) dv.$$

Ma si deve anche avere

$$\int_a^b D_1(v, s) \Gamma(v, t) dv = \int_a^b K(v, s) \Gamma(v, t) dv,$$

quindi

$$\int_a^b D_1(v, s) \Gamma(v, t) dv = (\sqrt{d} - k(s)) \Gamma(s, t)$$

e finalmente

$$\int_a^b D_1(v, s) \Gamma(v, t) dv = \int_a^b \Gamma(v, s) \Gamma(v, t) dv.$$

Sarà dunque

$$\int_a^b (D_1(v, s) - \Gamma(v, s)) (D_1(v, t) - \Gamma(v, t)) dv = 0,$$

cioè

$$(43) \quad D_1(s, t) = \Gamma(s, t).$$

Supponiamo ora che \sqrt{d} e $-\sqrt{d}$ siano entrambe costanti caratteristiche relative a $K(s, t)$ e $k(s)$.

Avremo allora

$$\sqrt{d} D(s, t) = \Gamma'(s, t) - \Gamma''(s, t),$$

dove $\Gamma'(s, t)$ e $\Gamma''(s, t)$ sono le funzioni caratteristiche relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondenti alle costanti \sqrt{d} e $-\sqrt{d}$, ed analogamente

$$\sqrt{h} B(s, t) = \Gamma'(s, t) - \Gamma''(s, t),$$

\sqrt{d} e \sqrt{h} essendo prese con lo stesso segno.

Per la relazione: $\int_a^b \Gamma'(v, s) \Gamma''(v, t) dv = 0$, si avrà dalla (42)

$$\int_a^b D_1(v, s) D_1(v, t) dv = \int_a^b \Gamma'(v, s) \Gamma'(v, t) dv + \int_a^b \Gamma''(v, s) \Gamma''(v, t) dv.$$

Ma si ha

$$\int_a^b D_1(v, s) \Gamma'(v, t) dv = \int_a^b K(v, s) \Gamma'(v, t) dv,$$

cioè

$$\int_a^b D_1(v, s) \Gamma'(v, t) dv = (\sqrt{d} - k(s)) \Gamma'(s, t),$$

od anche

$$\int_a^b D_1(v, s) \Gamma'(v, t) dv = \int_a^b \Gamma'(v, s) \Gamma'(v, t) dv,$$

ed analogamente

$$\int_a^b D_1(v, s) \Gamma''(v, t) dv = \int_a^b \Gamma''(v, s) \Gamma''(v, t) dv.$$

Sarà perciò

$$\int_a^b (D_1(v, s) - \Gamma'(v, s) - \Gamma''(v, s)) (D_1(v, t) - \Gamma'(v, t) - \Gamma''(v, t)) dv = 0$$

cioè

$$(44) \quad D_1(s, t) = \Gamma'(s, t) + \Gamma''(s, t).$$

23. Inversamente, se vale la (43), $\Gamma(s, t)$ essendo la funzione caratteristica corrispondente ad una costante μ , o se vale la (44), $\Gamma'(s, t)$ e $\Gamma''(s, t)$ essendo le funzioni caratteristiche corrispondenti a due costanti μ e $-\mu$, si ha $hd = 1$.

Infatti, se vale la (43) si ha: $D_n(s, t) = \mu^{n-1} \Gamma(s, t)$ e

$$d_n = \frac{\int_a^b \int_a^b D_n^2(s, t) ds dt}{\int_a^b \int_a^b D_{n-1}^2(s, t) ds dt} = \mu^2, \quad d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \mu^2;$$

$$B_n(s, t) = \frac{1}{\mu^{n-1}} \Gamma(s, t) \quad \text{e} \quad h_n = \frac{\int_a^b \int_a^b B_n^2(s, t) ds dt}{\int_a^b \int_a^b B_{n-1}^2(s, t) ds dt} = \frac{1}{\mu^2},$$

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \frac{1}{\mu^2},$$

quindi $hd = 1$.

Se vale la (44) si ha: $D_n(s, t) = \mu^{n-1} \Gamma'(s, t) + (-\mu)^{n-1} \Gamma''(s, t)$, e di qui, essendo $\int_a^b \int_a^b \Gamma'(s, t) \Gamma''(s, t) ds dt = 0$, si trae $d_n = \mu^2$, $d = \mu^2$.

Si ha anche: $B_n(s, t) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{n-1} \Gamma'(s, t) + \left(-\frac{1}{\mu}\right)^{n-1} \Gamma''(s, t)$, quindi

$$h_n = \frac{1}{\mu^2}, \quad h = \frac{1}{\mu^2}, \quad hd = 1.$$

Abbiamo così trovato che quando è $hd = 1$ si ha

$$K(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s, t) + \Gamma(s, t),$$

ovvero

$$K(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s, t) + \Gamma'(s, t) + \Gamma''(s, t)$$

e $K(s, t)$ rientra dunque nella forma (11) della Nota I.

24. Facciamo qui alcune osservazioni sulle funzioni caratteristiche.

Se $\Gamma(s, t)$ è la funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante μ ed n è dispari,

$$R(s, t) = (\mu^{n-1} + \mu^{n-2} k(t) + \dots + k^{n-1}(t)) \Gamma(s, t)$$

è la funzione caratteristica relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ e corrispondente alla costante μ^n .

Lo stesso succede se n è pari e $-\mu$ non è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ ed è inoltre $R(s, t) \neq 0$.

Se $R(s, t) = 0$ μ^n è costante caratteristica impropria relativamente a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$.

Se n è pari e $\Gamma'(s, t)$, $\Gamma''(s, t)$ sono le funzioni caratteristiche relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondenti rispettivamente alle costanti μ e $-\mu$, se

$$R(s, t) = (\mu^{n-1} + \mu^{n-2} k(t) + \dots + k^{n-1}(t)) \Gamma'(s, t) - \\ - (\mu^{n-1} - \mu^{n-2} k(t) + \dots - k^{n-1}(t)) \Gamma''(s, t)$$

non è identicamente nulla, μ^n è costante caratteristica propria relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ ed $R(s, t)$ è la corrispondente funzione caratteristica.

Se $R(s, t) = 0$, μ^n è costante caratteristica impropria relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$.

Inversamente: se $R(s, t)$ è la funzione caratteristica relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ corrispondente alla costante μ^n ed n è dispari,

$$\Gamma(s, t) = \frac{R(s, t)}{\mu^{n-1} + \mu^{n-2} k(t) + \dots + k^{n-1}(t)}$$

è la funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante μ .

Se n è pari, si formino le due funzioni

$$R_1(s, t) = \frac{1}{2\mu} \left(\mu R(s, t) + k(s) R(s, t) + \int_a^b K(s, v) R(v, t) dv \right),$$

$$R_2(s, t) = \frac{1}{2\mu} \left(\mu R(s, t) - k(s) R(s, t) - \int_a^b K(s, v) R(v, t) dv \right).$$

Se sono entrambe non identicamente nulle μ e $-\mu$ sono costanti caratteristiche proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, e le corrispondenti funzioni caratteristiche $\Gamma'(s, t)$ e $\Gamma''(s, t)$ soddisfano alle equazioni

$$(\mu^{n-1} + \mu^{n-2} k(t) + \dots + k^{n-1}(t)) \Gamma'(s, t) = R_1(s, t),$$

$$(\mu^{n-1} - \mu^{n-2} k(t) + \dots - k^{n-1}(t)) \Gamma''(s, t) = -R_2(s, t).$$

Se poi una sola delle due funzioni $R_1(s, t)$, $R_2(s, t)$ non è nulla, uno solo dei valori μ e $-\mu$ è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, e la corrispondente funzione caratteristica soddisfa alla prima o alla seconda delle precedenti relazioni, secondochè è $R_2(s, t) = 0$ o $R_1(s, t) = 0$.

Patologia vegetale. — *Alterazioni del ricambio e della permeabilità cellulare a temperature prossime al congelamento* ⁽¹⁾.
Nota di E. PANTANELLI, presentata dal Socio G. CUBONI.

In una precedente comunicazione ⁽²⁾ ho esposto brevemente i risultati di esperienze eseguite nel 1917, dalle quali si poteva dedurre che la resistenza al freddo non è in relazione con la concentrazione del succo cellulare, nè col suo tenore in acidi o sali, ma con la proporzione di zucchero, che la cellula riesce a conservare durante il raffreddamento. Constatata tale reazione difensiva, bisognava fare un altro passo e stabilire se lo zucchero intervenga solo come fonte di energia nella combustione respiratoria ⁽³⁾ o se anche protegga il protoplasma contro un eventuale autodigestione ⁽⁴⁾.

A questo scopo bisognava seguire il ricambio alimentare della cellula a temperatura minimale. Ma poichè si era constatato che negli organi aerei, esposti a temperature molto basse, si ha una rapida perdita di acqua per traspirazione, era sorto il sospetto che uno dei principali fattori della morte per freddo sia l'esagerato aumento della permeabilità del plasma per l'acqua e le sostanze disciolte, tanto più che è stato dimostrato da precedenti Autori (Nägeli 1861; Dixon e Atkins 1913; Maximow 1914) che il plasma congelato diventa totalmente permeabile. Per controllare la variazione della permeabilità durante il raffreddamento, bisognava ricorrere ad organi che potessero stare anche sott'acqua senza nocimento delle loro attività funzionali. Nel tempo stesso questi organi dovevano essere abbastanza voluminosi per fornire il materiale di confronto, avere una struttura omogenea, contenere il minimo possibile di cellule non vive e lasciarsi preparare senza la minima lesione.

Un materiale rispondente a tali requisiti fu trovato nella polpa (endocarpio) del mandarino (*Citrus nobilis*). Gli spicchi tolti a parecchi frutti, giustamente maturi e scelti in una partita omogenea, furono divisi in modo

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Questi rendiconti (5). Vol. XXVII, 1918, 1° sem. pp. 126-130; 148-153.

(3) La respirazione si svolge anche a bassa temperatura a spese dei carbidrati, finchè ve ne sono presenti.

(4) Ivanoff (1904). Palladin e Kostytschew (1907), Deleanno (1912), Pantanelli (1914), hanno già dimostrato che la cellula vegetale finchè ha a disposizione uno zucchero non consuma le albumine o, meglio, la sintesi compensa la decomposizione; ma appena lo zucchero è esaurito, si rende palese l'autodigestione delle proteine. Anche Fermi (1912) ha portato molti contributi alla dimostrazione dell'azione preservativa o antiproteolitica dello zucchero.

da analizzare una metà per ogni frutto prima, l'altra metà dopo il raffreddamento in frigorifero.

Avendo constatato che gli spicchi isolati di mandarino gelano intorno a -6° (almeno quelli della partita adoperata), in alcune serie di prove la temperatura non fu lasciata scendere sotto -5.5° , in altre serie fu abbassata fino a produrre la morte per congelamento. La temperatura più bassa fu tenuta costante per almeno 12 ore. Il materiale fu poi esaminato subito, senza dar tempo alla temperatura di risalire.

In questa Nota riassumo i risultati delle prime serie, in cui non avvenne congelazione e non si ebbe sofferenza visibile, tranne nella partita conservata asciutta, la quale dopo la refrigerazione accusava un principio di afflosciamento, però totalmente reversibile con immersione in acqua a temperatura superiore a 0° .

Le modificazioni delle attività cellulari all'approssimarsi della temperatura di congelamento sono più importanti, per lo studio dei fattori di resistenza al freddo, che i processi che si svolgono nel tessuto congelato, perchè nel primo caso sono ancora possibili, nel plasma, reazioni regolatrici o compensative che all'ultimo momento ne aumentano la resistenza.

Maximow (1912 e 1914) esponendo al congelamento frammenti di foglia di cavolo rosso, galleggianti su acqua o su soluzioni diverse, constatò, con l'esame microscopico, che molte sostanze (zuccheri, alcoli, sali minerali ed organici) aumentano la resistenza delle cellule al gelo, in relazione con la posizione del punto eutettico della soluzione, cioè di quella temperatura a cui il solvente ed il soluto solidificano insieme, e con la rapidità di penetrazione della soluzione esterna nel plasma. Vediamo cosa accadde nel nostro materiale a temperature prossime al congelamento.

1. *Tessuto conservato all'asciutto.* Il raffreddamento provocò una forte emissione di acqua, in forma di goccioline trasudanti alla superficie degli spicchi ⁽¹⁾. Questa perdita di acqua fece aumentare la densità, la viscosità e la concentrazione molecolare del succo. Calcolando però la diminuzione di acquosità, si accertò un principio di digestione delle albumine ed un leggero consumo degli zuccheri, accompagnato da idrolisi del carbidrato colloidale ⁽²⁾.

2. *Tessuto immerso in acqua.* Anzichè perdere acqua, il tessuto ne assorbì anche a bassa temperatura, ciò che fu possibile perchè il liquido

⁽¹⁾ Young (1915) ha osservato un rapido prosciugamento dei frutti congelati di arancio e limone.

⁽²⁾ Amido non esiste in questo parenchima; il carbidrato colloidale comprende sostanze di natura destrinica, talora un po' di muco, e sostanze pectiche, di cui è abbastanza ricco. Secondo Young nel congelamento degli aranci e dei limoni lo zucchero e l'acido diminuiscono poco, a meno che il gelo non duri tanto da far seccare totalmente il frutto.

esterno, in cui erano passate diverse sostanze uscite dall'organo, non congelò. Si ebbe una forte esosmosi di acidi, zucchero, composti azotati, resa possibile dal contatto coll'acqua ed acuita durante il raffreddamento. Essa permise una profonda decomposizione dei carbidrati, specialmente degli zuccheri, ed una forte autodigestione delle albumine, processi che negli spicchi conservati asciutti erano appena iniziati. In quel caso il leggero prosciugamento aveva avuto un effetto protettivo.

3. *Tessuto immerso in soluzioni di sali minerali.* (0,1 mol.). Il salnitro (KNO_3) limitò l'assorbimento di acqua dal liquido esterno, e, frenando l'esosmosi, protesse le cellule contro la perdita della semipermeabilità. Però non protesse il plasma contro l'autodigestione e non impedì una forte perdita di zuccheri e di acidi. Il salnitro potrà accrescere o diminuire la resistenza al freddo, a seconda che il beneficio arrecato col frenare l'esosmosi di sostanze prevale o no sul disturbo causato dall'autodigestione del plasma (¹).

Il cloruro sodico — i cui ioni stentano a penetrare nella maggior parte delle cellule vegetali adulte (Pantanelli 1915) — limitò l'assorbimento di acqua e l'esosmosi degli zuccheri e degli acidi, ma si distinse dal salnitro, perchè determinò anche al freddo un aumento di tutte le sostanze solubili nel succo e protesse in parte la proteina contro l'autodigestione determinata dal raffreddamento. Maximow ha osservato che il cloruro sodico protegge la cellula vegetale contro i danni del gelo.

Il fosfato acido di potassio — il cui anione penetra rapidamente nella cellula vegetale (Pantanelli 1915) — non influì sull'assorbimento di acqua nè sull'esosmosi di sostanze dal tessuto, ma ebbe una grande influenza sul ricambio, impedendo totalmente la digestione delle albumine, la decomposizione degli zuccheri e l'ossidazione respiratoria degli acidi organici. Esso ebbe un'azione protettiva contro il freddo anche maggiore di quella del cloruro sodico.

4. *Tessuto immerso in soluzioni di zuccheri* (0,1 mol.). Gli zuccheri furono saggiati per la loro importanza alimentare e respiratoria e perchè generalmente sono assorbiti lentamente dalle cellule vegetali adulte, mentre rendono il plasma meno permeabile.

Nel nostro materiale, esposto al freddo, il saccarosio limitò l'assorbimento di acqua e l'esosmosi delle sostanze sciolte, più che il cloruro sodico. La densità del succo si mantenne invariata, tenuto conto dell'assorbimento di acqua, mentre gli zuccheri diminuirono, ciò che prova che il saccarosio esterno non era assorbito e non impediva il consumo respiratorio degli zuccheri contenuti nella cellula. La proteina fu in parte attaccata e anche le sostanze fosforate del succo diminuirono, però meno che in acqua.

(¹) Secondo Bartetzko (1909) il salnitro diminuisce la resistenza al freddo dell'*Aspergillus niger*. Maximow constatò un'azione protettiva del salnitro.

Il glucosio limitò l'assorbimento di acqua e l'esosmosi di sostanze dal tessuto, ma un po' meno del saccarosio; dal bilancio del consumo e dell'uscita risulterebbe che non fu assorbito glucosio. Esso protesse i costituenti del plasma meno del saccarosio e non impedì la decomposizione degli zuccheri contenuti nel succo cellulare, pur determinando una sintesi di carbidrato colloidale.

5. *Tessuto immerso in soluzioni di alcoli.* (0,1 mol.). Furono messi a confronto 3 alcoli: la mannite, che è pochissimo assorbita ed ha azione osmotica simile a quella degli zuccheri, la glicerina, che penetra rapidamente e rende il plasma permeabile, l'alcool etilico, che penetra all'istante e rende il plasma molto permeabile. Nelle esperienze di Maximow la glicerina e l'alcool mostrarono un'azione protettiva, la mannite quasi nulla.

Nel nostro materiale, la mannite non influì sull'assorbimento dell'acqua, ma non impedì una notevole esosmosi di acidi e di zuccheri. Essa ebbe una notevole azione protettiva contro l'autodigestione delle albumine, ma non impedì il progressivo aumento della permeabilità cellulare (¹).

La glicerina invece, non influì sull'assorbimento di acqua e sull'uscita degli zuccheri, ma favorì l'esosmosi di altre sostanze. Essa impedì la distruzione respiratoria degli zuccheri, ma protesse solo in parte il plasma contro l'autodigestione, probabilmente perchè favoriva l'esosmosi dei prodotti solubili della proteolisi.

L'alcool etilico favorì l'esosmosi delle sostanze solubili e l'autodigestione delle proteine, ma difese gli zuccheri dalla combustione respiratoria.

6. *Tessuto immerso in soluzione acida od alcalina.* L'acido citrico (0,1 mol.) — che già esiste nell'endocarpio del mandarino — aumentò l'assorbimento di acqua e l'esosmosi complessiva, ma non quella degli zuccheri, e limitò l'esosmosi degli acidi. Esso ebbe un'azione diversa dall'acido fosforico, in quanto protesse gli zuccheri ma non preservò le proteine dall'autodigestione. Questa diversità di portamento obbliga a lasciare insoluta la questione dell'azione che gli acidi in generale, cioè il catione idrogeno, possano avere sulla resistenza al freddo. Maximow ebbe cattivi risultati con l'acido citrico.

Il carbonato sodico (0.1 mol.), adoperato per stabilire una reazione alcalina non troppo dannosa, favorì l'assorbimento di acqua, ma determinò anche una forte esosmosi di acidi e di zuccheri. Ricordiamo che gli alcali in generale, cioè l'anione idrossile, determinano un rapidissimo aumento della permeabilità cellulare. (Pantanelli, 1905, e molti Autori posteriori). Anche nel nostro materiale la reazione alcalina rese il plasma più permea-

(¹) Lidforss (1907) ritiene che la mannite abbia un'azione protettiva contro il freddo in talune piante sempreverdi, non è però una conclusione basata su dati sperimentali.

bile e non protesse gli zuccheri contro la combustione respiratoria, nè le albumine contro l'autodigestione (1).

Riassumendo, le cellule dell'endocarpio di mandarino, raffreddate a temperatura molto vicina a quella di congelamento, accusano:

1. un progressivo aumento della permeabilità cellulare, reso evidente: a) da una rapida emissione di acqua dal tessuto tenuto all'asciutto; b) dall'esosmosi di sostanza dal tessuto immerso in acqua. Esso è favorito da talune sostanze che penetrano rapidamente nella cellula (glicerina, alcool etilico, acido citrico, alcali libero);

2. una rapida distruzione degli zuccheri, limitata dalla fornitura di sostanze che possano essere assorbite ed utilizzate per la respirazione (glicerina, alcool etilico, acido citrico) o da quelle sostanze che frenano l'esosmosi degli zuccheri o dei prodotti intermedi della respirazione (cloruro sodico, fosfato potassico, acido citrico). Gli zuccheri presenti nel liquido esterno (saccarosio, glucosio) non agirono in questo senso, perchè non furono assorbiti;

3. una vivace autodigestione delle proteine, tanto maggiore quanto più è favorita l'esosmosi dei prodotti solubili della digestione e quanto più rapida è la distruzione degli zuccheri.

La conoscenza delle alterazioni funzionali nella cellula raffreddata fino alla soglia del congelamento permette di comprendere molto più da vicino il processo di morte per freddo e quindi i fattori di resistenza al freddo, come vedremo nella prossima Nota.

Biologia. — *Correlazioni e differenziazioni*. Nota III di G. COTRONEI, pres. dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Maximow, invece, osservò che le cellule fogliari del cavolo rosso resistevano meglio al congelamento in presenza di una soluzione molto diluita di soda caustica.

Biologia. — *Ricerche sperimentali e istologiche sul comportamento della tiroide in regione gozzigena* ⁽¹⁾. Nota preliminare di G. ZANONI, presentata dal Socio B. GRASSI.

I risultati che in questa Nota preliminare brevemente riassumo — riservandomi di esporre particolarmente in un più esteso lavoro l'andamento delle ricerche — si riferiscono, per quanto concerne lo studio sperimentale, alla continuazione, da me compiuta, di quegli esperimenti già descritti in una precedente Nota pubblicata dal prof. Grassi e da me, in questi stessi Rendiconti, Nota con la quale essi pienamente si accordano ⁽²⁾. In ambiente gozzigeno le tiroidi dei ratti albini provenienti da località indenne, in date epoche, apparentemente non riferibili ad alcuna condizione ambientale nota, e in rapporto anche con particolari condizioni individuali subiscono in modo, entro certi limiti, uniforme negli animali di una stessa serie di esperimento — salvo alcune oscillazioni individuali — un ingrossamento notevolissimo, raggiungendo valori di peso quadrupli e più di quelli che si hanno, a parità di tutte le altre condizioni, in animali vissuti a Roma; mentre poi — e questa è appunto la circostanza più interessante, che si è sempre verificata, nei limiti di tempo da me seguiti — negli altri periodi presentano, pur continuando la somministrazione di cibi e acqua del luogo, un aumento assai minore, lievissimo talvolta, ma costante, sia del peso, i cui valori minimi almeno coincidono con i massimi di Roma, sia soprattutto delle dimensioni sempre evidentemente superiori.

Delle tiroidi di un buon numero di animali di esperimento ho poi intrapreso lo studio istologico, perchè era di fondamentale importanza, per avvicinarci alla soluzione del problema, stabilire il confronto con tiroidi di località sicuramente indenne, come Roma.

Le tiroidi fortemente ingrandite presentano infatti — rispetto a quelle — complesse modificazioni strutturali che si delineano già relativamente presto, quando ancora l'ingrossamento è minimo. Senza entrare nei particolari, mi limiterò, in questa Nota, a rilevare come il fatto dominante sia un fenomeno di iperplasia, che si manifesta però in due modi nettamente diversi: e cioè con proliferazione, in un caso, dei cumuli epiteliali interfollicolari (epitelio compatto o solido) e conseguente enorme prevalenza di questi, da cui si differenziano piccoli follicoli rotondi dall'epitelio cubico; con proliferazione, nell'altro, della parete dei follicoli preesistenti, i quali aumentano quindi

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

⁽²⁾ *Nuovo contributo allo studio del gozzismo*. Nota preliminare. Rend. Accad. Lincei, Vol. XXVI, ser. 5^a, sem. 1^o.

notevolmente di dimensione, facendosi irregolari nel contorno, costituito da epitelio cilindrico altissimo (onde un aspetto simile a quello comunemente descritto nel morbo di Flajani).

Per quanto i due processi si verifichino, in genere, insieme in una stessa tiroide, si ha però sempre, per una decisa prevalenza dell'uno sull'altro, netta distinzione di due tipi (di cui il primo può paragonarsi all'iperplasia micro-follicolare descritta da Bircher, pure sui ratti), ciascuno dei quali sembra presentarsi costante per una data serie di esperimento, il che farebbe pensare a una correlazione con condizioni ambientali, piuttosto che con elementi individuali: solo però un maggior numero di osservazioni potrà decidere in proposito. Certo alle due strutture, morfologicamente così differenziate, devono corrispondere diversità fisiologiche nei riguardi della composizione del secreto, e ciò non solo in relazione alla diversa proporzione dell'epitelio compatto, che, per il suo significato relativamente ai prodotti di elaborazione cellulare, differisce da quello dei follicoli, ma in relazione anche con lo stesso contenuto visibile di questi. In linea generale, pur senza stabilire una netta differenza, si può infatti dire che il colloide — il quale, in un primo stadio funzionale, all'affermarsi del processo iperplastico, scompare totalmente o quasi dalla ghiandola, per tornar poi nuovamente a raccogliersi in varie proporzioni negli alveoli — è in quasi tutti i follicoli del primo tipo in prevalenza omogeneo, simile al normale, mentre nella maggioranza di quelli del secondo appare finissimamente granuloso o filamentoso, accompagnato spesso da un estremo appiattimento dell'epitelio e rarefazione del protoplasma. Colloide di tal natura si riscontra anche in follicoli, isolati o in piccoli gruppi, del primo tipo, accompagnato sempre da uguali fenomeni a carico dell'epitelio.

Questi insieme con altri numerosi fatti — tra cui la frequente presenza nel lume alveolare di cellule epiteliali trasformate — mi inducono ad ammettere in tali tiroidi modificazioni qualitative nei processi della secrezione.

Rispetto agli altri costituenti della ghiandola, oltre a un non raro ispessirsi della capsula connettivale e alla frequente presenza di cumoli linfocitari (espressione di quell'iperplasia linfatica che, secondo Marine, accompagnerebbe sempre l'iperplasia tiroidea), sono soprattutto interessanti le alterazioni a carico della circolazione e delle pareti vasali. In molte tiroidi del primo tipo iperplastico infatti, dalla condizione — comune a tutte le ghiandole ingrossate — di relativa iperemia dei capillari, si passa — in alcune zone, o addirittura in tutto il parenchima — a una forte dilatazione di essi, che assumono un andamento sinusoidale, e talora si trasformano in vere e proprie amplissime lacune vascolari, separando, isolando e anche comprimendo, in forma di cordoni e trabecole rivestite dall'endotelio, gli elementi parenchimali. Rispetto alle pareti vasali, mi limiterò qui a ricordare, come il fatto più importante, la presenza nelle più grandi arterie della capsula di grossi

bottoni — mai riscontrabili nelle tiroidi di Roma — enormemente sviluppati, e costituiti da un tessuto chiaramente fibrillare, proveniente da quello strato connettivale fibroso, che in molte arterie è interposto tra l'endotelio e la elastica interna. Essi sono probabilmente da differenziarsi da quelli descritti da Schmidt come formazione normale nell'uomo, e da paragonarsi in parte forse ad alcuni di quelli descritti da Getzowa nelle tiroidi di cretini, e da Cerletti e Perusini nella tiroide di un cane pure cretino. Caratteristiche ancora, in una forte percentuale delle tiroidi studiate, numerose cellule — endofollicolari nel secondo tipo di iperplasia, quasi esclusivamente libere nello stroma, nel primo tipo — le quali sono sferiche, con nucleo piccolo intensamente colorato, spostato alla periferia da una massa di pigmento giallo che nasconde ogni traccia di protoplasma e deve interpretarsi come pigmento ematico, mentre però scarsissimi sono i fenomeni emorragici.

Se ora, in base a questi dati, si passa all'analisi delle tiroidi lievemente ingrandite, si rivelano in queste sempre divergenze da quanto si ha in località indenne, in tutto paragonabili a quelle descritte nelle prime. Tali divergenze — salvo i bottoni arteriosi che, negli organi in cui si manifestano, sono sempre accentuatissimi — si presentano sì molto attenuate, e talora rilevabili solo dopo minuta analisi, ma si possono ritenere, negli individui studiati, costanti. Questo fatto — sia pure limitato ancora a un numero relativamente non grande di casi — associato al costante ingrossamento e confermato dai dati di altri autori, ha particolare importanza perchè, insieme con la osservazione già fatta dal prof. Grassi e dalla dott. Miraldi sui ratti di Losanna e di Heidelberg, e quella ricordata nella Nota citata circa le tiroidi di Zurigo, sembra ricollegare i fenomeni che si verificano nei ratti con quelli osservati nell'uomo (Tenchini e Cavatorti — Isenschmidt-Sanderson), e dimostra nell'ambiente gozzigeno continuità d'azione dell'ignoto agente — continuità rilevabile solo dal confronto con i dati relativi a località sicuramente indenni, come Roma.

I dati istologici riferiti — sia pure molto sommariamente — dimostrano poi come l'ingrossamento tiroideo dovuto allo stimolo gozzigeno, se si manifesta primariamente come un'iperplasia, espressione d'un adattamento funzionale che può fors'anco avere carattere compensatorio, è però un fenomeno molto più complesso, che un'ordinaria iperplasia fisiologica, ed esprime, nelle modificazioni della secrezione, probabilmente uno spostamento del punto d'equilibrio intraglandolare tra i diversi ormoni tiroidei — mentre poi non manca l'indizio di fenomeni di correlazione con altri elementi del sistema endocrino (linfatico e forse cromaffine).

Anche per i ratti selvatici sono state condotte estese ricerche su un numero notevole di individui, ricerche accompagnate anch'esse dall'analisi istologica. In seguito ad esse posso affermare che i ratti selvatici hanno un

comportamento affatto diverso da quelli albinici, in quanto le loro tiroide non presentano mai traccia alcuna d'ingrossamento, neppure qualora essi, sottratti alla loro vita ordinaria, vengano allevati in captività nelle stesse condizioni di spazio e di nutrizione che gli albinici.

Anche la struttura istologica si presenta secondo il caratteristico tipo descritto come normale, e solo appare modificata in quelli viventi in captività, da un processo di attiva iperplasia, che però deve attribuirsi, con ogni probabilità, soltanto alle modificate condizioni di vita e di nutrizione.

Complessivamente quindi i ratti selvatici dovrebbero ritenersi resistenti allo stimolo gozzigeno, a cui le condizioni di addomesticamento e il correlativo indebolimento renderebbero invece sensibile la razza albina.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÖRTI informa la Classe che con Decreto Luogotenenziale del 30 gennaio u. s., è stato sanzionato l'articolo aggiuntivo allo Statuto accademico, riguardante la nomina dei Soci onorari; e dà comunicazione dei ringraziamenti che gli onorevoli SONNINO, ORLANDO e THAON DI REVEL, eletti Soci onorari in virtù del Decreto più sopra indicato, hanno inviato all'Accademia.

Il Presidente RÖRTI dà il triste annuncio della morte del Socio straniero EDOARDO PICKERING, dell'Osservatorio astronomico dell'« Harvard College » a Cambridge Mass., avvenuta il 3 febbraio 1919; apparteneva il defunto all'Accademia, per l'*Astronomia*, sino dal 28 agosto 1901.

Lo stesso PRESIDENTE legge un telegramma col quale il Socio straniero MITTAG-LEFFLER vivamente si conduole coll'Accademia per la perdita da questa fatta nella persona del compianto Socio sen. ULISSE DINI.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, facendo particolare menzione di quella di L. TAFFARA, intitolata: *Le Nubi*, edita a cura dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica; il professore MILLOSEVICH mette in rilievo la bellezza e l'importanza di questa opera, che fu molto lodata anche in numerose Riviste straniere. Lo stesso Segretario presenta inoltre una pubblicazione di G. B. DE TONI in memoria del senatore prof. LORENZO CAMERANO; e una serie di opuscoli pubblicati dall'Osservatorio Ximeniano dei P. P. Scolopi in Firenze (ALFANI - GIOVANNONZI - GUIDI).

Il Socio G. CASTELNUOVO offre all'Accademia un suo volume: *Calcolo delle probabilità*, dandone la seguente notizia:

Il libro è frutto di un corso di lezioni che ho tenuto anni or sono alla Università di Roma. Ho subito anch'io il fascino che questa singolare disciplina ha esercitato su tanti altri matematici ed ho voluto approfondirne le basi ed esaminarne alcune applicazioni. L'interesse del Calcolo delle probabilità risiede in buona parte nelle brillanti applicazioni che di esso furono fatte, specialmente nell'ultimo cinquantennio, a vari rami di fisica, di astronomia, di biologia; il detto Calcolo ci dà infatti l'unico mezzo di cui disponiamo per indagare fenomeni dipendenti da cause troppo numerose o troppo incerte perchè i procedimenti della matematica classica possano fornirci una risposta. Ma è pur grande l'interesse metodologico di questa scienza, in cui i rapporti tra basi sperimentali e costruzione logica sono più riposte che in altre teorie matematiche e non meno meritevoli di esame.

A redigere l'opera mi ha pure spinto un'altra ragione. Il nostro paese ha sinora partecipato scarsamente a questa moderna corrente di pensiero che cerca di indagare o spiegare i fenomeni naturali mediante considerazioni statistiche. Ho la speranza che, attirando l'attenzione dei giovani matematici sopra un campo altamente degno di esser conosciuto, si possa dare un impulso alla formazione tra noi di una scuola di statistica matematica, pari a quelle che fioriscono in paesi stranieri.

Se il mio volume potrà contribuire a questo scopo, il lavoro che vi ho dedicato riceverà il più ambito compenso.

Il Socio VOLTERRA presenta la 1^a annata della rivista *L'Aeronauta* fondata dal prof. R. GIACOMELLI; e parla dei pregi di questa pubblicazione che si propone di volgarizzare quanto si riferisce alla navigazione aerea, trattando questioni d'indole tanto generale che particolare.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 marzo 1919.

- ALFANI G. — Le vibrazioni nei fabbricati prodotte da macchine in movimento. (Pubblicazioni dell'Osservatorio Ximeniano di Firenze). Milano, 1915. 8°, pp. 1-15.
- ALFANI G. — Letture pireliometriche eseguite nel periodo giugno 1915 - dicembre 1916 (Pubblicazioni dell'Osservatorio Ximeniano di Firenze). Firenze, 1917. 8°. pp. 1-43.
- ALFANI G. — Letture pireliometriche eseguite nel periodo gennaio-dicembre 1917 (Pubblicazioni dell'Osservatorio Ximeniano, n.° 125). Firenze, 1918. 8°. pp. 1-51.
- L'Areonauta. — Rivista mensile di cultura tecnica diretta da R. Giacomelli. Anno I. Roma, 1918.
- BIANCHI E. — Lezioni di areonautica, parte I-II. Roma, 1917-18. 8°. pp. 1-207; 1-263.
- BIANCHI E. — Tavole astronomiche per la determinazione del punto. Roma, 1914. 8°. pp. I-XV, 1-89.
- BUNTE J. — Gyroscopic theory of the mechanical part of nature. Portsmouth, 1909. 8°. pp. 1-24.
- CASTELNUOVO G. — Calcolo delle probabilità. Roma, 1919. 8°. pp. I-XXXII, 1-373.
- DE TONI G. B. — In memoria del Socio nazionale prof. sen. Lorenzo Camerano (Estr. dagli « Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Tomo LXXVII, pp. 1-5). Venezia, 1918. 8°.
- FOSSA MANCINI E. — A proposito di alcune recenti pubblicazioni riguardanti ammoniti liassiche (Estr. dalla « Rivista italiana di paleontologia ». anno XXII, pp. 1-15). Parma, 1916. 8°.
- FOSSA MANCINI E. — Probabili rapporti filogenetici di alcune ammoniti liassiche (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXXIII, pp. 1-14). Pisa, 1919. 8°.
- FOSSA MANCINI E. — Sorgenti di sbarramento di Marmorie e Brestie (Friuli orientale). (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXXII, pp. 1-10). Pisa, 1919. 8°.
- FOSSA MANCINI E. — Studio geologico di tre sorgenti proposte per l'acquedotto di Jesi (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXXI, pp. 1-22). Pisa, 1916. 8°.
- GIOVANNONZI G. — Scolopi Galileiani (Pubblicazioni dell'Osservatorio Ximeniano di Firenze, n. 124). Firenze, 1917. 8°, pp. 1-24.
- GUIDI P. — I terremoti lucchesi (Pubblicazioni dell'Osservatorio Ximeniano di Firenze, n.° 120). Lucca, 1915. 8°, pp. 1-58).
- TAFFARA L. — Le Nubi: parte I testo, parte II atlante (R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica). Roma, 1917. 4°, pp. 1-67.
- TURATI E. — Ancora sulle variazioni del Parnassius Apollo Pumilus Stich (Estr. dagli « Atti della Società italiana di scienze naturali », vol. LVII, pp. 183-8). Pavia, 1918. 8°.
-

